

Na ostatniej prostej. Figury na płaszczyźnie – rozwiązania

1. Długość trzeciego boku nie może być większa niż suma długości dwóch pozostałych boków. $3 + 7 = 10$, więc trzeci bok musi mieć mniej niż 10 cm.
Jeśli oznaczymy trzeci bok a , to obwód trójkąta wynosi $3 + 7 + a$, czyli $10 + a$.
Ponieważ a to mniej niż 10 cm, to $10 + a < 20$.

Poprawna odpowiedź: FP.

2. Przyjrzyjmy się kątom w trójkątach.

- **T1** jest trójkątem równoramiennym, więc kąty przy podstawie będą równe. Suma kątów w trójkącie musi być równa 180° , więc kąty przy podstawie muszą być równe 30° :
 $120^\circ + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ$.
- **T2** jest trójkątem równoramiennym, ponieważ ma dwa kąty tej samej miary 30° . Trzeci kąt musi więc mieć miarę 120° , ponieważ $120^\circ + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ$.
- **T3** jest trójkątem równoramiennym, powstałym z podzielenia kwadratu przekątną na pół. Kąty w tym trójkącie mają miary 90° , 45° i 45° .
- **T4** to trójkąt równoboczny, w którym wszystkie kąty mają miarę 60° .

Tylko trójkąty **T1** i **T2** mają takie same kąty. Aby stwierdzić, że są przystające konieczna jest jeszcze równość odpowiedniej pary boków. Z rysunku odczytujemy, że ramiona obu trójkątów są tej samej długości, zatem trójkąty **T1** i **T2** są parą trójkątów przystających.

Poprawna odpowiedź: T1 i T2.

3. Trójkąty ABC i DEF mają jeden bok tej samej długości oraz jeden z kątów przy tym boku tej samej miary. Przyjrzyjmy się pozostałym kątom w tych trójkątach.

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę: $180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$. Miara trzeciego kąta w tym trójkącie wynosi: $180^\circ - (61^\circ + 56^\circ) = 63^\circ$.

W trójkącie DEF kąt przy wierzchołku E ma miarę: $180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$. Trzeci kąt ma więc miarę: $180^\circ - (61^\circ + 62^\circ) = 57^\circ$.

Trójkąty ABC i DEF mają tylko jeden taki sam kąt, zatem nie są przystające.

4. Oznaczmy kąt ostry w tym rombie literą α , a kąt rozwarty literą β . Przekątne rombu zawsze przecinają się pod kątem prostym. Z informacji z zadania wiemy, że kąt ostry w tym rombie jest o 65° mniejszy od kąta między przekątnymi. Zatem:

$$\alpha = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$$

Każdy romb jest równoległobokiem, a w każdym równoległoboku suma kątów ostrego i rozwartego wynosi 180° . Stąd:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 180^\circ \\ \beta &= 180^\circ - \alpha \\ \beta &= 180^\circ - 25^\circ \\ \beta &= 155^\circ\end{aligned}$$

Kąt rozwarty w tym rombie ma miarę 155° .

5. Krok 1. Obliczmy najpierw miarę kąta w pięciokącie foremnym.

Suma miar wszystkich kątów dowolnego pięciokąta wynosi $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. (Dlaczego? Poprowadź dwie przekątne pięciokąta wychodzące z jednego wierzchołka. Podzielą one ten pięciokąt na trzy trójkąty. Suma miar kątów w każdym trójkącie jest równa 180° , zatem w trzech trójkątach: $3 \cdot 180^\circ$.) Pięciokąt foremny ma 5 równych kątów, zatem miara jednego z nich wynosi:

$$\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

Krok 2. Wyznamy miary kątów trójkąta ABE .

Kąt EAB w trójkącie ABE jest równy kątowi pięciokąta foremnego, wynosi zatem 108° . Dwa boki trójkąta ABE są także bokami pięciokąta foremnego $ABCDE$, więc trójkąt ABE jest trójkątem równoramiennym ($\sphericalangle ABE = \sphericalangle BEA$). Możemy więc znaleźć miarę pozostałych kątów:

$$\begin{aligned}\sphericalangle ABE = \sphericalangle BEA &= \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} \\ \sphericalangle ABE = \sphericalangle BEA &= 36^\circ\end{aligned}$$

Krok 3. Wyznamy miary kątów trójkąta CYD .

Trójkąt CYD jest trójkątem prostokątnym, $\sphericalangle CYD = 90^\circ$. Aby obliczyć miarę kąta CDY , zauważmy że:

- Kąty CDY i EDZ mają taką samą miarę,
- $\sphericalangle CDY + \sphericalangle EDC + \sphericalangle EDZ = 180^\circ$.

$$\text{Stąd: } 2\sphericalangle CDY + 108^\circ = 180^\circ$$

$$2\sphericalangle CDY = 72^\circ$$

$$\sphericalangle CDY = 36^\circ$$

Jeśli znamy miary dwóch kątów w trójkącie, miarę trzeciego kąta obliczymy z równania:

$$90^\circ + 36^\circ + \sphericalangle DCY = 180^\circ$$

$$\sphericalangle DCY = 180^\circ - 90^\circ - 36^\circ$$

$$\sphericalangle DCY = 54^\circ$$

Odpowiedź: Miary kątów trójkąta ABE wynoszą 108° , 36° i 36° . Miary kątów trójkąta CYD są równe: 90° , 36° i 54° .

6. Przyjmijmy, że boki kwadratów tworzących sieć mają długość 1. Trójkąt DEF ma podstawę długości 3 i wysokość długości 2. Pole tego trójkąta to:

$$P_{DEF} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

Oznaczmy wierzchołki sieci: M – wierzchołek prawy górny, N – wierzchołek prawy dolny. Aby znaleźć pole trójkąta ABC , od pola prostokąta $DNMC$ możemy odjąć pola trzech trójkątów znajdujących się na zewnątrz trójkąta ABC :

$$P_{ABC} = P_{DNMC} - (P_{CDA} + P_{CBM} + P_{ANB})$$

$$P_{ABC} = 8 - \left(\frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 1}{2} + \frac{2 \cdot 1}{2} \right)$$

$$P_{ABC} = 8 - (2 + 2 + 1)$$

$$P_{ABC} = 3$$

W ten sposób udowodniliśmy, że $P_{DEF} = P_{ABC}$.